ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 24, № 125 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-47-59

УДК 517.956.23

Построение фундаментального решения для одного вырождающегося эллиптического уравнения с оператором Бесселя

Наиля Анасовна ИБРАГИМОВА

ФГБОУ ВО «Казанский государственный энергетический университет»

420066, Российская Федерация, г. Казань, ул. Красносельская, 51

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1915-7986, e-mail: NAI.liya@yandex.ru

Construction of a fundamental solution for a one degenerating elliptic equation with a Bessel operator

Nailya A. IBRAGIMOVA

Kazan State Energy University

51 Krasnoselskaya St., Kazan 420066, Russian Federation

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1915-7986, e-mail: NAI.liya@yandex.ru

Аннотация. Вырождающиеся эллиптические уравнения, содержащие оператор Бесселя, представляют собой математические модели осевой и многоосевой симметрии самых разнообразных процессов и явлений окружающего мира. Сложности в исследовании таких уравнений связаны, в том числе, с наличием особенностей в коэффициентах. В данной статье рассмотрено p-мерное, $p \geqslant 3$, вырождающееся эллиптическое уравнение с отрицательным параметром, в котором по одной из переменных действует оператор Бесселя. Построено фундаментальное решение этого уравнения и исследованы его свойства, в частности, поведение на бесконечности и в точках координатных плоскостей $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$. Полученные результаты найдут применение при построении решений краевых задач, так как на основе фундаментального решения можно подобрать потенциал, с помощью которого сингулярная задача сводится к регулярной системе интегральных уравнений.

Ключевые слова: вырождающееся эллиптическое уравнение с оператором Бесселя; вырождающееся B-эллиптическое уравнение; фундаментальное решение

Для цитирования: *Ибрагимова Н. А.* Построение фундаментального решения для одного вырождающегося эллиптического уравнения с оператором Бесселя // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 47–59. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-47-59

Abstract. Degenerating elliptic equations containing the Bessel operator are mathematical models of axial and multi-axial symmetry of a wide variety of processes and phenomena of the surrounding world. Difficulties in the study of such equations are associated, inter alia, with the presence of singularities in the coefficients. This article considers a p-dimensional, $p \geqslant 3$, degenerating elliptic equation with a negative parameter, in which the Bessel operator acts on one of the variables. A fundamental solution of this equation is constructed and its properties are investigated, in particular, the behavior at infinity and at points of the coordinate planes $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$. The results obtained will find application in the construction of solutions of boundary value problems, since on the basis of a fundamental solution, it is possible to choose the potential with which the singular problem is reduced to a regular system of integral equations.

Keywords: degenerating elliptic equation with a Bessel operator; degenerating B-elliptic equation; fundamental solution

For citation: Ibragimova N. A. Postroenie fundamental'nogo resheniya dlya odnogo vyrozhdayushchegosya ellipticheskogo uravneniya s operatorom Besselya [Construction of a fundamental solution for a one degenerating elliptic equation with a Bessel operator]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 47–59. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-47-59 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В последние годы уделяется большое внимание изучению неклассических уравнений в частных производных. С одной стороны, такие уравнения мало изучены, а с другой стороны, все чаще обнаруживаются их приложения к различным задачам механики, физики и техники.

В данной статье рассматривается неклассическое вырождающееся эллиптическое уравнение относительно функции $u(x_1, \ldots, x_p)$, $p \geqslant 3$, с отрицательным параметром

$$M_B[u] \overset{def}{=} x_p^m \left(\Delta_{x'} u + B_{x_{p-1}} u\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} - \lambda^2 x_p^m u = 0, \tag{1}$$

где по одной из переменных действует оператор Бесселя $B_{x_{p-1}} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_{p-1}^2} + \dfrac{k}{x_{p-1}} \dfrac{\partial}{\partial x_{p-1}}$, $\Delta_{x'} = \sum\limits_{l=1}^{p-2} \dfrac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ — лапласиан, $\lambda \in \mathbb{R}$, $m > 0$ — некоторые постоянные. Эллиптические уравнения, по одной или нескольким переменным которых действует оператор Бесселя

$$B_{x_l} = \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + \frac{k}{x_l} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

были названы И. А. Киприяновым в [1] B-эллиптическими.

Построение фундаментальных решений для новых классов дифференциальных уравнений весьма трудная, но актуальная задача. Фундаментальные результаты в этом направлении для B-эллиптических уравнений принадлежат И. А. Киприянову [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались В. В. Катраховым [2], А. Ю. Сазоновым [3]. Исследование сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя было продолжено в работах Л. Н. Ляхова [4], [5]. Построением фундаментальных решений для некоторых вырождающихся B-эллиптических уравнений, а также исследованием краевых задач для этих уравнений занимались Ф. Г. Мухлисов [6], А. Ш. Хисматуллин [7], Э. В. Чеботарева [8], И. Б. Гарипов, Р. М. Мавлявиев [9] и др.

Вопросы постановки корректных краевых задач и разработки конструктивных методов их решения для уравнения (1) не изучены, так как применение метода потенциала для решения краевых задач требует знания фундаментального решения, которое, по нашим сведениям, еще не построено.

1. Основные результаты

Пусть $\mathbb{E}_p$ — p-мерное евклидово пространство, $\mathbb{E}_p^{++} = \{x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{E}_p \mid x_{p-1} > 0, x_p > 0\}$, D — конечная область в $\mathbb{E}_p^{++}$, ограниченная поверхностью Γ и частями Γ_0 и Γ_1 плоскостей $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$, соответственно, $D_e = \mathbb{E}_p^{++} \backslash \overline{D}$. Для точек евклидова пространства введем обозначения: $x'' = (x_1, \ldots, x_{p-2})$, $x' = (x_1, \ldots, x_{p-1}) = (x'', x_{p-1})$, $x = (x_1, \ldots, x_p) = (x', x_p) = (x'', x_{p-1}, x_p)$.

Обозначим через $C^{\infty}_{0,B^{p-1}}(\overline{\mathbb{E}}_p^{++})$ множество функций, определенных на $\overline{\mathbb{E}}_p^{++}$, бесконечное число раз непрерывно дифференцируемых, финитных в $\overline{\mathbb{E}}_p^{++}$ и удовлетворяющих условию $\dfrac{\partial u}{\partial x_{p-1}} = \mathrm{o}(1)$ при $x_{p-1} \to 0$.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $Z(x, x_0)$ называется фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке $x_0 \in \mathbb{E}_p^{++}$, если для некоторого $k > 0$ и для любой функции $\varphi \in C^{\infty}_{0,B^{p-1}}(\overline{\mathbb{E}}_p^{++})$ такой, что $x_0 \in \operatorname{Supp} \varphi$, выполняется

$$\int\limits_{\mathbb{E}_p^{++}} Z(x, x_0) M_B[\varphi(x)] x_{p-1}^k \, dx = -\varphi(x_0). \tag{2}$$

Приступим к построению фундаментального решения уравнения (1). С помощью замены переменных по формулам

$$\xi_l = x_l, \quad l = \overline{1, p-1}, \quad \xi_p = (1-\gamma) x_p^{\frac{1}{1-\gamma}} \tag{3}$$

уравнение (1) приведем к B-эллиптическому уравнению с отрицательным параметром

$$\Delta_{\xi''} u + B_{\xi_{p-1}} u + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_p^2} + \frac{\gamma}{\xi_p} \frac{\partial u}{\partial \xi_p} - \lambda^2 u = 0, \tag{4}$$

где $\xi'' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-2})$, $\gamma = \frac{m}{m+2}$. Ясно, что $0 < \gamma < 1$ при $m > 0$.

Ищем решение уравнения (4) в виде

$$u(\xi) = v(r),$$

где $r=\sqrt{\sum\limits_{l=1}^{p}\xi_l^2}$. Относительно v получаем уравнение

$$\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{p+k+\gamma-1}{r}\,\frac{dv}{dr}-\lambda^2 v=0. \tag{5}$$

С помощью замены переменных по формулам

$$v(r)=\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{-\nu}W(t),\quad r=\frac{t}{\lambda},\quad \nu=\frac{p+k+\gamma-2}{2} \tag{6}$$

уравнение (5) сводим к уравнению Бесселя от чисто мнимого аргумента

$$t^2\,\frac{\partial^2 W(t)}{\partial t^2}+t\,\frac{\partial W(t)}{\partial t}-\left(t^2+\nu^2\right)W(t)=0. \tag{7}$$

Известно [10], что частными решениями уравнения (7) являются функция Бесселя от чисто мнимого аргумента $\mathrm{I}_\nu(t)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}$ и функция Макдональда

$$\mathrm{K}_\nu(t)=\frac{\pi}{2}\,\frac{\mathrm{I}_\nu(t)-\mathrm{I}_{-\nu}(t)}{\sin\nu\pi}. \tag{8}$$

Возвращаясь в (8) к переменной r, с учетом формул (6), получим частное решение уравнения (5)

$$v(r)=\beta\, r^{-\nu}K_\nu(\lambda r), \tag{9}$$

где β — некоторая постоянная, подлежащая определению. Из асимптотического представления функции Макдональда на бесконечности следует, что для функции (9) при $r\to\infty$ справедлива оценка

$$v(r)=\mathrm{O}\left(e^{-r}\right). \tag{10}$$

Из разложения функции Макдональда в степенной ряд следует, что функция v может быть представлена в виде

$$v(r)=\frac{\beta\Gamma(\nu)}{\lambda^\nu 2^{1-\nu}}\,r^{-2\nu}+\psi(r), \tag{11}$$

где $\psi(r)$ — регулярная функция в $\mathbb{E}_p^{++}$. Функция (11) является решением уравнения (4), которое имеет в начале координат степенную особенность вида $r^{-2\nu}$.

Для получения решения уравнения (4) с особенностью в точке $(\xi_0'',0,\xi_{0p})\in\overline{\mathbb{E}}_p^{++}$ применим к функции (11) оператор обобщенного сдвига [11]

$$Z\left(\xi'',\xi_{p-1},\xi_p;\ \xi_0'',0,\xi_{0p}\right)=\frac{\beta\Gamma(\nu)C_\gamma}{\lambda^\nu 2^{1-\nu}}\int\limits_0^\pi\left(\left|\xi''-\xi_0''\right|^2+\xi_{p-1}^2+\right.$$

$$\left.+\xi_p^2+\xi_{0p}^2-2\xi_p\xi_{0p}\cos\varphi\right)^{-\nu}\sin^{\gamma-1}\varphi\,d\varphi+\psi^*\left(\xi'',\xi_{p-1},\xi_p;\ \xi_0'',0,\xi_{0p}\right),$$

где $C_\gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$, $\psi^*\left(\xi'', \xi_{p-1}, \xi_p;\ \xi_0'', 0, \xi_{0p}\right)$ — регулярная в точке $\left(\xi_0'', 0, \xi_{0p}\right)$ функция. Имеем

$$Z\left(\xi'', \xi_{p-1}, \xi_p;\ \xi_0'', 0, \xi_{0p}\right) = \frac{\beta C_\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+k-2}{2}\right)}{2^{2-\nu}\lambda^\nu}\left(\xi_p\xi_{0p}\right)^{-\frac{\gamma}{2}} \times$$
$$\times\, r_{\xi\widetilde{\xi}_0}^{2-p-k} + g_2\left(\xi'', \xi_{p-1}, \xi_p;\ \xi_0'', 0, \xi_{0p}\right), \tag{12}$$

где $r^2_{\xi\widetilde{\xi}_0} = \left|\xi'' - \xi_0''\right|^2 + \xi_{p-1}^2 + \left(\xi_p - \xi_{0p}\right)^2$. Возвращаясь в (12) к переменной x, с учетом формул (3), получим

$$Z\left(x'', x_{p-1}, x_p;\ x_0'', 0, x_{0p}\right) = \frac{\beta C_\gamma (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+k-2}{2}\right)}{2^{2-\nu+\gamma}\lambda^\nu} \times$$
$$\times \left(x_p x_{0p}\right)^{-\frac{m}{4}}\rho^{2-p-k} + g_2\left(x'', x_{p-1}, x_p;\ x_0'', 0, x_{0p}\right), \tag{13}$$

где $\rho = \sqrt{\left|x'' - x_0''\right|^2 + x_{p-1}^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{0p}^{\frac{m+2}{2}}\right)^2}$. Отсюда следует, что решение (13) уравнения (1) имеет в точках координатной плоскости $x_{p-1} = 0$ степенную особенность вида ρ^{2-p-k}.

Применим к функции (13) оператор обобщенного сдвига

$$Z(x, x_0) = \frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+k-2}{2}\right)}{2^{2-\nu+\gamma}\lambda^\nu \left(x_p x_{0p}\right)^{\frac{m}{4}}}\int\limits_0^\pi \Big[\left|x'' - x_0''\right|^2 + x_{p-1}^2 + x_{0p-1}^2 -$$
$$-2x_{p-1}x_{0p-1}\cos\varphi + \frac{4}{(m+2)^2}\left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{0p}^{\frac{m+2}{2}}\right)^2\Big]^{\frac{2-p-k}{2}}\sin^{k-1}\varphi\, d\varphi + g_2^*(x, x_0), \tag{14}$$

где $C_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$, а $g_2^*(x, x_0)$ — регулярная в точке x_0 функция.

П р е д л о ж е н и е 1. $Z(x, x_0)$ *допускает при* $\rho_{xx_0} \to 0$ *оценку*

$$Z(x, x_0) = \mathrm{O}\left(\rho_{xx_0}^{2-p}\right),$$

где $\rho^2_{xx_0} = \left|x' - x_0'\right|^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{0p}^{\frac{m+2}{2}}\right)^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим в (14) подынтегральную функцию

$$\left[\left|x'' - x_0''\right|^2 + x_{p-1}^2 + x_{0p-1}^2 - 2x_{p-1}x_{0p-1}\cos\varphi + \frac{4}{(m+2)^2}\left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{0p}^{\frac{m+2}{2}}\right)^2\right]^{\frac{2-p-k}{2}} =$$
$$= \Big[\left|x'' - x_0''\right|^2 + x_{p-1}^2 + x_{0p-1}^2 - 2x_{p-1}x_{0p-1} + 2x_{p-1}x_{0p-1}(1-\cos\varphi) +$$
$$+\frac{4}{(m+2)^2}\left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{0p}^{\frac{m+2}{2}}\right)^2\Big]^{\frac{2-p-k}{2}} = \left(\rho^2_{xx_0} + 4x_{p-1}x_{0p-1}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{2-p-k}{2}}.$$

Тогда интеграл в (14) запишется в виде

$$I = \int\limits_0^\pi \Big[\left|x'' - x_0''\right|^2 + x_{p-1}^2 + x_{0p-1}^2 - 2x_{p-1}x_{0p-1}\cos\varphi +$$

$$+ \frac{4}{(m+2)^2}\left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{0p}^{\frac{m+2}{2}} \right)^2 \Big]^{\frac{2-p-k}{2}} \sin^{k-1}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^\pi \left(\rho_{xx_0}^2 + 4x_{p-1}x_{0p-1}\sin^2\frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{2-p-k}{2}} \sin^{k-1}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \left(x_{p-1}x_{0p-1}\right)^{\frac{2-p-k}{2}} \int\limits_0^\pi \left(\omega^2 + 4\sin^2\frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{2-p-k}{2}} \sin^{k-1}\varphi\, d\varphi, \tag{15}$$

где $\omega^2 = \frac{\rho_{xx_0}^2}{x_{p-1}x_{0p-1}}$. Разность между интегралом (15) и интегралом

$$\left(x_{p-1}x_{0p-1}\right)^{\frac{2-p-k}{2}} \int\limits_0^\pi \left(\omega^2 + \varphi^2\right)^{\frac{2-p-k}{2}} \varphi^{k-1} d\varphi$$

является регулярной функцией в $\mathbb{E}_p^{++}$. Обозначим ее через $g_3(x, x_0)$. Тогда I можно представить в виде

$$I = \left(x_{p-1}x_{0p-1}\right)^{\frac{2-p-k}{2}} \int\limits_0^\pi \left(\omega^2 + \varphi^2\right)^{\frac{2-p-k}{2}} \varphi^{k-1} d\varphi + g_3(x, x_0). \tag{16}$$

Заменой $\varphi = \omega t$ интеграл (16) приводится к виду

$$I = \left(x_{p-1}x_{0p-1}\right)^{\frac{2-p-k}{2}} \omega^{2-p} \int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}} \left(1 + t^2\right)^{\frac{2-p-k}{2}} t^{k-1} dt + g_3(x, x_0) =$$

$$= \left(x_{p-1}x_{0p-1}\right)^{\frac{2-p-k}{2}} \frac{\rho_{xx_0}^{2-p}}{\left(x_{p-1}x_{0p-1}\right)^{\frac{2-p}{2}}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}} \left(1 + t^2\right)^{\frac{2-p-k}{2}} t^{k-1} dt + g_3(x, x_0) =$$

$$= \left(x_{p-1}x_{0p-1}\right)^{-\frac{k}{2}} \rho_{xx_0}^{2-p} \int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}} \left(1 + t^2\right)^{\frac{2-p-k}{2}} t^{k-1} dt + g_3(x, x_0) =$$

$$= \left(x_{p-1}x_{0p-1}\right)^{-\frac{k}{2}} \rho_{xx_0}^{2-p} \left[I_1 - I_2\right] + g_3(x, x_0),$$

где $I_1 = \int\limits_0^\infty (1+t^2)^{\frac{2-p-k}{2}} t^{k-1} dt$, $I_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{\omega}}^\infty (1+t^2)^{\frac{2-p-k}{2}} t^{k-1} dt$.

С помощью известной формулы (см. [12]):

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{(p+qx^\nu)^{n+1}} = \frac{1}{\nu p^{n+1}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\Gamma\left(n+1-\frac{\mu}{\nu}\right)}{\Gamma(n+1)}, 0<\frac{\mu}{\nu}<n+1, \tag{17}$$

интеграл I_1 запишется в виде

$$I_1 = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+k-2}{2}\right)}.$$

Разлагая подынтегральную функцию интеграла I_2 в степенной ряд, получим

$$t^{k-1}\left(1+t^2\right)^{\frac{2-p-k}{2}} = t^{1-p}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{2-p-k}{2}} = t^{1-p}\left[1+\frac{2-p-k}{2}t^{-2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{2-p-k}{2}(\frac{2-p-k}{2}-1)}{2!}t^{-4} - \frac{\frac{2-p-k}{2}(\frac{2-p-k}{2}-1)(\frac{2-p-k}{2}-2)}{3!}t^{-6}+\ldots\right] =$$

$$= t^{1-p} + \frac{2-p-k}{2}t^{-(p+1)} - \frac{\frac{2-p-k}{2}\,\frac{p+k}{2}}{2!}t^{-(p+3)} + \frac{\frac{2-p-k}{2}\,\frac{p+k}{2}\,\frac{p+k+2}{2}}{3!}t^{-(p+5)}+\ldots$$

Этот ряд сходится равномерно в промежутке $\left[\frac{\pi}{\omega},\infty\right)$, поэтому его можно интегрировать в этом промежутке почленно. В результате получим

$$I = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+k-2}{2}\right)}\left(x_{p-1}x_{0p-1}\right)^{-\frac{k}{2}}\rho_{xx_0}^{2-p} + g_4(x,x_0).$$

Отсюда и из (14) следует, что

$$Z(x,x_0) = \frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{2^{3-\nu+\gamma}\lambda^\nu}\times$$
$$\times\left(x_p x_{0p}\right)^{-\frac{m}{4}}\left(x_{p-1}x_{0p-1}\right)^{-\frac{k}{2}}\rho_{xx_0}^{2-p} + Z^*(x,x_0), \tag{18}$$

где $Z^*(x,x_0)$ — регулярная функция в $\mathbb{E}_p^{++}$. □

Докажем, что при определенном значении постоянной β функция (14) удовлетворяет равенству (2) и, следовательно, является фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке $x_0\in\mathbb{E}_p^{++}$. Для этого получим формулы Грина для оператора M_B.

Обозначим через $C^k_{B^l}(D)$ множество функций ψ класса $C^k(D)$ таких, что $\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_l} = \mathrm{o}(1)$ при $x_l\to 0$, $l=\overline{1,p}$.

Пусть функции $u,v\in C^2_{B^p}(D)\cap C^2_{B^{p-1}}(D)\cap C^1(\overline{D})$. Непосредственным вычислением можно убедится, что имеет место тождество

$$vM_B[u]x_{p-1}^k + \left(x_p^m\sum_{l=1}^{p-1}\frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{\partial v}{\partial x_p}\frac{\partial u}{\partial x_p}\right)x_{p-1}^k =$$

$$= \sum_{l=1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(x_{p-1}^k x_p^m v \frac{\partial u}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_p} \left(x_{p-1}^k v \frac{\partial u}{\partial x_p} \right) - \lambda^2 x_{p-1}^k x_p^m uv.$$

Интегрируя обе части этого тождества по области D и пользуясь формулой Остроградского, получаем

$$\int\limits_D v M_B[u] x_{p-1}^k dx + \int\limits_D \left(x_p^m \sum_{l=1}^{p-1} \frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{\partial v}{\partial x_p}\frac{\partial u}{\partial x_p} \right) x_{p-1}^k dx =$$

$$= \int\limits_\Gamma v A[u] \xi_{p-1}^k d\Gamma - \lambda^2 \int\limits_D uv x_p^m x_{p-1}^k dx, \tag{19}$$

где $A = \xi_p^m \sum\limits_{l=1}^{p-1} \cos(n, \xi_l) \frac{\partial}{\partial \xi_l} + \cos(n, \xi_p) \frac{\partial}{\partial \xi_p}$ — конормальная производная, n — единичный вектор внешней нормали к границе. Формула (19) называется первой формулой Грина для оператора M_B.

Меняя в формуле (19) местами u и v, получим

$$\int\limits_D u M_B[v] x_{p-1}^k dx + \int\limits_D \left(x_p^m \sum_{l=1}^{p-1} \frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{\partial v}{\partial x_p}\frac{\partial u}{\partial x_p} \right) x_{p-1}^k dx =$$

$$= \int\limits_\Gamma u A[v] \xi_{p-1}^k d\Gamma - \lambda^2 \int\limits_D uv x_p^m x_{p-1}^k dx.$$

Вычитая это равенство из (19), получаем вторую формулу Грина для оператора M_B:

$$\int\limits_D \left[v M_B[u] - u M_B[v] \right] x_{p-1}^k dx = \int\limits_\Gamma \left[v A[u] - u A[v] \right] \xi_{p-1}^k d\Gamma. \tag{20}$$

Пусть $\varphi \in C^\infty_{0,B^{p-1}}(\overline{\mathbb{E}}_p^{++})$, $x_0 \in \operatorname{Supp} \varphi$ — фиксированная точка, $S_{x_0\varepsilon}$ — сфера с центром в точке x_0 и радиуса ε такая, что

$$S_{x_0\varepsilon} \subset \mathbb{E}_p^{++}, \quad S_R^+ = \{x \in \mathbb{E}_p^{++} : \, |x| = R, x_{p-1} > 0, \, x_p > 0\}$$

— часть сферы, принадлежащая $\mathbb{E}_p^{++}$ с центром в начале координат, такая, что $\operatorname{Supp}\varphi \subset Q_R^+$, где Q_R^+ — часть шара в $\mathbb{E}_p^{++}$, ограниченная S_R^+. Обозначим через $Q_{\varepsilon R}^+$ область, ограниченную S_R^+, $S_{x_0\varepsilon}$ и частями плоскостей $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$.

Применяя к функциям $Z(x, x_0)$ и $\varphi(x)$ вторую формулу Грина (20) в области $Q_{\varepsilon R}^+$, с учетом того, что $M_B\left[Z(x, x_0)\right] = 0$ в $Q_{\varepsilon R}^+$, получим

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon R}^+} Z(x, x_0) M_B[\varphi(x)] x_{p-1}^k dx = I'_\varepsilon + I''_\varepsilon, \tag{21}$$

где $I'_\varepsilon = -\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} Z(x,x_0)A[\varphi(x)]x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon}$, $I''_\varepsilon = \int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x)A[Z(x,x_0)]x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon}$, A — внешняя конормаль к сфере $S_{x_0\varepsilon}$.

Нетрудно доказать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I'_\varepsilon = 0$. Вычислим предел при $\varepsilon \to 0$ интеграла I''_ε. Воспользуемся формулой (18) для значения $Z(x,x_0)$. Получим

$$I''_\varepsilon = \int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x)A[Z(x,x_0)]x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon} = (2-p)\frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma}{2^{3-\nu+\gamma}\lambda^\nu}\times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{x_{0p}^{\frac{m}{4}}\, x_{0p-1}^{\frac{k}{2}}} \int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x)\rho_{xx_0}^{1-p} A[\rho_{xx_0}] x_p^{-\frac{m}{4}} x_{p-1}^{\frac{k}{2}} dS_{x_0\varepsilon} + I^*_\varepsilon, \quad (22)$$

где $I^*_\varepsilon = \int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x)A[Z^*(x,x_0)]x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon}$. Нетрудно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I^*_\varepsilon = 0. \quad (23)$$

Найдем предел $\breve{I}$ при $\varepsilon \to 0$ интеграла

$$\breve{I}_\varepsilon = (2-p)\frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{2^{3-\nu+\gamma}\lambda^\nu x_{0p}^{\frac{m}{4}}\, x_{0p-1}^{\frac{k}{2}}} \int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x)\rho_{xx_0}^{1-p} A[\rho_{xx_0}] x_p^{-\frac{m}{4}} x_{p-1}^{\frac{k}{2}} dS_{x_0\varepsilon}.$$

Вычисляя конормальную производную $A[\rho_{xx_0}]$ и пользуясь формулой Лагранжа, приведем этот интеграл к виду

$$\breve{I}_\varepsilon = (2-p)\frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{2^{3-\nu+\gamma}\lambda^\nu x_{0p}^{\frac{m}{4}}\, x_{0p-1}^{\frac{k}{2}}\,\varepsilon}\times$$

$$\times \int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x) \frac{x_p^{\frac{3m}{4}} \left[\sum\limits_{l=1}^{p-1}(x_l - x_{0l})^2 + \left(\frac{x_{0p}+\theta(x_p-x_{0p})}{x_p}\right)^{\frac{m}{2}}(x_p - x_{0p})^2\right]}{\left[\sum\limits_{l=1}^{p-1}(x_l - x_{0l})^2 + (x_{0p}+\theta(x_p-x_{0p}))^m (x_p-x_{0p})^2\right]^{\frac{p}{2}}} x_{p-1}^{\frac{k}{2}} dS_{x_0\varepsilon},$$

где $0 < \theta < 1$. Переходя в этом интеграле к обобщенной сферической системе координат

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{p-2}\sin\theta_{p-1} \\ x_2 = x_{02} + r\cos\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{p-2}\sin\theta_{p-1} \\ x_3 = x_{03} + r\cos\theta_2 \ldots \sin\theta_{p-2}\sin\theta_{p-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{p-1} = x_{0p-1} + r\cos\theta_{p-2}\sin\theta_{p-1} \\ x_p = x_{0p} + r\cos\theta_{p-1} \end{cases}$$

$(0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \theta_1 < 2\pi;\ 0 \leqslant \theta_\mu < \pi,\ \mu = 2, \ldots, p-1)$ и учитывая то, что элемент поверхности сферы представляется в виде $dS_{x_0\varepsilon} = \varepsilon^{p-1} \sin\theta_2 \ldots \sin^{p-2}\theta_{p-1} d\theta_1 \ldots d\theta_{p-1}$, получаем

$$\breve{I}_\varepsilon = (2-p)\frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{2^{3-\nu+\gamma}\lambda^\nu x_{0p}^{\frac{m}{4}}\, x_{0p-1}^{\frac{k}{2}}\,\varepsilon}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \sin\theta_2\, d\theta_2 \ldots \int_0^\pi \sin^{p-3}\theta_{p-2}\, d\theta_{p-2}\times$$

$$\times\int_0^\pi \varphi\left(x_{01} + \varepsilon\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{p-1}, \ldots, x_{0p} + \varepsilon\cos\theta_{p-1}\right)\left(x_{0p} + \varepsilon\cos\theta_{p-1}\right)^{\frac{3m}{4}}\times$$

$$\times\frac{\varepsilon^2\sin^2\theta_{p-1} + \left(\frac{x_{0p}+\theta\varepsilon\cos\theta_{p-1}}{x_{0p}+\varepsilon\cos\theta_{p-1}}\right)^{\frac{m}{2}}\varepsilon^2\cos^2\theta_{p-1}}{\left[\varepsilon^2\sin^2\theta_{p-1} + \left(x_{0p}+\theta\varepsilon\cos\theta_{p-1}\right)^m\varepsilon^2\cos^2\theta_{p-1}\right]^{\frac{p}{2}}}\times$$

$$\times\left(x_{0p-1} + \varepsilon\cos\theta_{p-2}\sin\theta_{p-1}\right)^{\frac{k}{2}}\varepsilon^{p-1}\sin^{p-2}\theta_{p-1} d\theta_{p-1}.$$

Сокращая на ε^{p+1} и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\breve{I} = (2-p)\frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{2^{3-\nu+\gamma}\lambda^\nu}\, x_{0p}^{\frac{m}{2}}\varphi(x_0)\times$$

$$\times\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \sin\theta_2\, d\theta_2 \ldots \int_0^\pi \sin^{p-3}\theta_{p-2}\, d\theta_{p-2}\int_0^\pi \frac{\sin^{p-2}\theta_{p-1}\, d\theta_{p-1}}{\left(\sin^2\theta_{p-1} + x_{0p}^m\cos^2\theta_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}} =$$

$$= (2-p)\frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)\pi^{\frac{p-1}{2}}}{2^{2-\nu+\gamma}\lambda^\nu\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\times$$

$$\times\, x_{0p}^{\frac{m}{2}}\varphi(x_0)\int_0^\pi \frac{\sin^{p-2}\theta_{p-1}\, d\theta_{p-1}}{\left(\sin^2\theta_{p-1} + x_{0p}^m\cos^2\theta_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}}. \tag{24}$$

Преобразуем интеграл в (24)

$$J = \int_0^\pi \frac{\sin^{p-2}\theta_{p-1}\, d\theta_{p-1}}{\left(\sin^2\theta_{p-1} + x_{0p}^m\cos^2\theta_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{p-2}\theta_{p-1}\, d\theta_{p-1}}{\left(\sin^2\theta_{p-1} + x_{0p}^m\cos^2\theta_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}} =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{p-2}\theta_{p-1}\, d\left(\operatorname{tg}\theta_{p-1}\right)}{\left(\operatorname{tg}^2\theta_{p-1} + x_{0p}^m\right)^{\frac{p}{2}}} = 2x_{0p}^{-\frac{m}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x_{0p}^{-\frac{m}{2}}\operatorname{tg}\theta_{p-1}\right)^{p-2} d\left(x_{0p}^{-\frac{m}{2}}\operatorname{tg}\theta_{p-1}\right)}{\left(\left(x_{0p}^{-\frac{m}{2}}\operatorname{tg}\theta_{p-1}\right)^2 + 1\right)^{\frac{p}{2}}}.$$

Используя замену $x_{0p}^{-\frac{m}{2}} \operatorname{tg}\theta_{p-1} = t$ и учитывая, что $t=0$ при $\theta_{p-1}=0$, $t=\infty$ при $\theta_{p-1}=\frac{\pi}{2}$, имеем $J = 2x_{0p}^{-\frac{m}{2}}\int\limits_0^\infty \frac{t^{p-2}dt}{(1+t^2)^{\frac{p}{2}}}$. Отсюда, на основании формулы (17), получаем

$$J = x_{0p}^{-\frac{m}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} = x_{0p}^{-\frac{m}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\frac{p-2}{2}\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}.$$

Подставляя полученное выражение в (24), определяем

$$\breve{I} = -\frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\pi^{\frac{p}{2}}}{2^{1-\nu+\gamma}\lambda^\nu}\,\varphi(x_0). \tag{25}$$

Находим нормирующую константу

$$\beta = \frac{2^{1-\nu+\gamma}\lambda^\nu}{C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\pi^{\frac{p}{2}}} = \frac{2^{1-\nu+\gamma}\lambda^\nu}{(m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\pi^{\frac{p-2}{2}}}. \tag{26}$$

Итак, из (22) получаем следующее предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x) A[Z(x,x_0)] x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon} = -\varphi(x_0).$$

Следовательно, переходя к пределу в (21) при $\varepsilon\to 0$ и $R\to\infty$, с учетом (26), соотношений (22), (23), (25) и финитности функции $\varphi(x)$, получаем (2).

Таким образом, фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в точке x_0 при малых значениях ρ_{xx_0} представляется в виде

$$Z(x,x_0) = \frac{\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{p}{2}}}\,(x_p x_{0p})^{-\frac{m}{4}}\,(x_{p-1}x_{0p-1})^{-\frac{k}{2}}\,\rho_{xx_0}^{2-p} + Z^*(x,x_0),$$

где $Z^*(x,x_0)$ — регулярная функция в $\mathbb{E}_p^{++}$.

Также нетрудно доказать, что для фундаментального решения $Z(x,\xi)$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\frac{\partial Z(x,\xi)}{\partial x_p} = \mathrm{o}(1) \quad \text{при} \quad x_p\to 0, \qquad \frac{\partial Z(x,\xi)}{\partial \xi_p} = \mathrm{o}(1) \quad \text{при} \quad \xi_p\to 0.$$

Из формулы (10) следует, что на бесконечности имеет место асимптотическая формула $Z(x,x_0) = \mathrm{O}\left(e^{-\rho_0}\right)$, где $\rho_0^2 = |x'|^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\,x_p^{m+2}$.

П р е д л о ж е н и е 2. $Z(x,x_0)$ *имеет в точках координатной плоскости* $x_p=0$ *степенную особенность вида* $\rho_{x\tilde{\tilde{x}}_0}^{2-p-\gamma}$, *где* $\rho_{x\tilde{\tilde{x}}_0}^2 = |x'-x_0'|^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\,x_p^{m+2}$, $\tilde{\tilde{x}}_0 = (x_0', 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично доказательству предложения 1. □

Полученные в работе результаты в дальнейшем планируется использовать для решения краевых задач.

Список литературы

[1] И. А. Киприянов, В. И. Кононенко, “Фундаментальные решения B-эллиптических уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **3**:1 (1967), 114–129.

[2] В. В. Катрахов, “Общие краевые задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений”, *Математический сборник*, **112**:3 (1980), 354–379.

[3] А. Ю. Сазонов, Л. Н. Суркова, “О единственности классического решения задачи Дирихле для B-эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **12**:4 (2007), 523–524.

[4] Л. Н. Ляхов, “Фундаментальные решения сингулярных дифференциальных уравнений с D_B-оператором Бесселя”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **278**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2012, 148–160.

[5] Л. Н. Ляхов, А. В. Рыжков, “О решениях B-полигармонического уравнения”, *Дифференциальные уравнения*, **36**:10 (2000), 1365–1368.

[6] Ф. Г. Мухлисов, “О существовании и единственности решения некоторых уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя”, *Изв. вузов. Матем.*, 1984, № 11, 63–66.

[7] А. Ш. Хисматуллин, “Решение краевых задач для одного вырождающегося B-эллиптического уравнения 2-го рода методом потенциалов”, *Изв. вузов. Матем.*, 2007, № 1, 63–75.

[8] Э. В. Чеботарева, “Исследование краевых задач для сингулярного B-эллиптического уравнения методом потенциалов”, *Изв. вузов. Матем.*, 2010, № 5, 88–90.

[9] I. B. Garipov, R. M. Mavlyaviev, “Fundamental solution of a multidimensional axisymmetric equation”, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **63**:9 (2018), 1290–1305.

[10] Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций.* Т. 1, И.Л., М., 1949, 798 с.

[11] Б. М. Левитан, “Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье”, *УМН*, **6**:2(42) (1951), 102–143.

[12] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, М., 1971, 1108 с.

References

[1] I. A. Kipriyanov, V. I. Kononenko, “Fundamental solutions of B-elliptic equations”, *Differ. Equ.*, **3**:1 (1967), 114–129 (In Russian).

[2] V. V. Katrakhov, “General boundary value problems for a class of singular and degenerate elliptic equations”, *Math. USSR-Sb.*, **40**:3 (1981), 325–347.

[3] A. Yu. Sazonov, L. N. Surkova, “On the uniqueness of the classical solution of the Dirichlet problem for a B-elliptic equation with constant coefficients”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **12**:4 (2007), 523-524 (In Russian).

[4] L. N. Lyakhov, “Fundamental solutions of singular differential equations with a bessel D_B-operator”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **278** (2012), 139–151.

[5] L. N. Lyakhov, A. V. Ryzhkov, “Solutions of the B-polyharmonic equation”, *Differ. Equ.*, **36**:10 (2000), 1507–1511.

[6] F. G. Mukhlisov, “On the existence and uniqueness of the solution of some partial differential equations with the Bessel differential operator”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **28**:11 (1984), 81–85.

[7] A. Sh. Khismatullin, “Solution of boundary value problems for one degenerate B-elliptic equation of the 2nd kind by the method of potentials”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **51**:1 (2007), 58–70.

[8] E. V. Chebatoreva, “The study of boundary value problems for a singular B-elliptic equation by the method of potentials”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2010, № 5, 88–90 (In Russian).

[9] I. B. Garipov, R. M. Mavlyaviev, “Fundamental solution of a multidimensional axisymmetric equation”, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **63**:9 (2018), 1290–1305.

[10] G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions.* V. 1, Foreign Literature Publ., Moscow, 1949 (In Russian).

[11] B. M. Levitan, “Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions”, *Russian Mathematical Surveys*, **6**:2(42) (1951), 102–143 (In Russian).

[12] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Sums, Series and Products*, The Science Publishing House, Moscow, 1971 (In Russian).

Информация об авторе

Ибрагимова Наиля Анасовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инженерной кибернетики. Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, Российская Федерация. E-mail: NAI.liya@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1915-7986

Поступила в редакцию 09.01.2019 г.
Поступила после рецензирования 11.02.2019 г.
Принята к публикации 14.03.2019 г.

Information about the author

Nailya A. Ibragimova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Engineering Cybernetics Department. Kazan State Energy University, Kazan, the Russian Federation. E-mail: NAI.liya@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1915-7986

Received 9 January 2019
Reviewed 11 February 2019
Accepted for press 14 March 2019